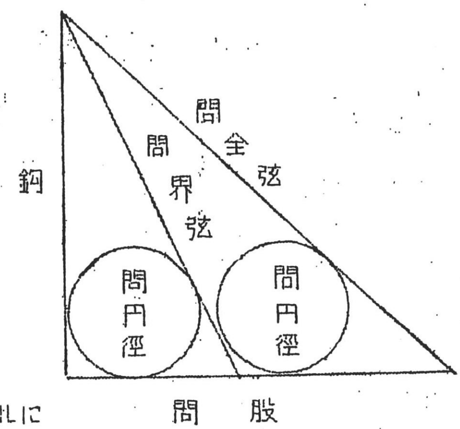
鎌田醫王寺の扁額(一)の譯及解法

奉 懸 御 寶 前

今直角三角形がある。その内に図の様に界弦を引き二等円を内接させる。界弦より全弦は7寸長く，鈎は8寸である。界弦と三辺（股弦）及円の直径の長さを問う。



答曰　界弦は10寸，全弦は17寸，股は15寸，

円の直径は4寸弱．

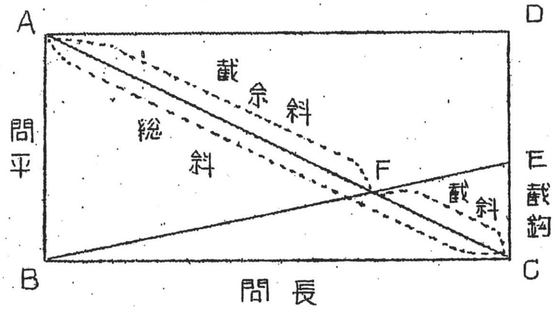
解法　7寸に鈎の8寸を掛けて（56歩），これに鈎（8寸）の自乗を加へ（120歩），これを8倍し（360歩），又鈎の自乗を加へ（1024歩）平方に開いて開平商（32寸）を得，鈎を加へ（40寸）4で割って界弦（10寸）を得，これを用ゐて他の数を得て問に合致する。

以上の解法を式で示すと．

$$7 \times 8 + 8^2 = 120 \qquad 120 \times 8 + 8^2 = 1024$$

$$\sqrt{1024} + 8 = 40, \qquad 40 \div 4 = 10$$

$$x = \frac{8 + \sqrt{8^2 + 8(7 \cdot 8 + 8^2)}}{4}$$



今矩形（直）ABCDがあって線分BE（弦）の自乗と AB（平）との和は237寸で，AF（截餘斜）は13寸6分，FC（截斜）は3寸4分である。矩形の二辺の長さを問ふ。

（13寸6分と3寸4分との和は総斜17寸である）

答　矩形の二辺は（平　8寸（長）15寸

解法　未知数xをAB（平）とし，それを自乗し，AC（総斜）の自乗（17^2）から引いて餘りがBC（長）の自乗で別におく。　237からxを引き余りがBEの自乗で，それからBCの自乗を引いて余りがEC（截鈎）の自乗で，x^2を加へ13寸6分の自乗を掛けて左とする。　17へx^2を掛け左を引き，自乗して再び別におく。13寸6分を四乗しxの自乗とECの自乗とを掛け，4倍し，再び別においたものと消し合って方程式を得る、この四次式を解いて平AB（x）の値を得る、前の方法で長（BC）を得て問に合致する。

以上の解法を式で示すと　$17^2 - x^2 = BC^2$，$237 - x = BE^2$，

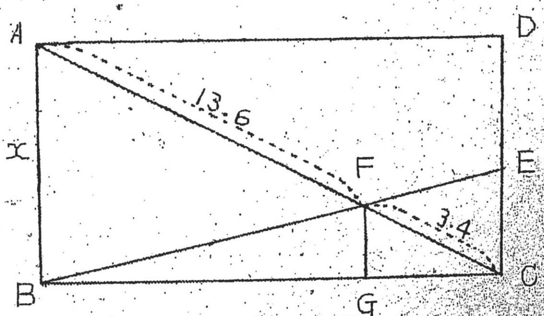
$$237 - x - (17^2 - x^2) = EC^2 \qquad \{237 - x - (17^2 - x^2) + x^2\} \times 13.6^2 = 左$$

$$\left[17x^2 - \{237 - x - (17^2 - x^2) + x^2\} \times 13.6^2\right]^2 - 13.6^4 \times x^2 \{237 - x - (17^2 - x^2)\} \times 4 = 0$$

この四次方程式を解いて　$x = 8$

洋算式解法

上記鎌田醫王寺の扁額算題四問中二題について洋算既ち現代の数學でその解法を次に記す



解　FよりBCへ垂線FGを下し，

AB=xとおくと　AB//FG//EC

$$\therefore \frac{AB}{FG} = \frac{AC}{FC} = \frac{13.6 + 3.4}{3.4} = \frac{17}{3.4} = \frac{5}{1}$$

$\therefore$ AB = 5FG

又　$$\frac{FG}{EC} = \frac{BG}{BC} = \frac{AF}{AC} = \frac{13.6}{17} = \frac{4}{5}$$

$\therefore$ 5FG = 4EC

$\therefore\ x = AB = 5FG = 4EC$

$\therefore\ EC = \dfrac{x}{4}$

次に　$AC^2 - AB^2 = BC^2$

$17^2 - x^2 = BC^2$　（長冪）　(1)

$BE^2 + x = 237$

$\therefore\ 237 - x = BE^2$（弦冪）　(2)

(2)−(1)　$237 - x - (17^2 - x^2) = BE^2 - BC^2$

$= EC^2 = \left(\dfrac{x}{4}\right)^2$

$\therefore\ 237 \times 16 - 16x - 17^2 \times 16 + 16x^2 = x^2$

$\therefore\ 15x^2 - 16x - 832 = 0$

$(15x + 104)(x - 8) = 0$

然ルニ　$x > 0$　$\therefore\ 15x + 104 = 0$

$\therefore\ x - 8 = 0$　$\therefore\ x = 8$

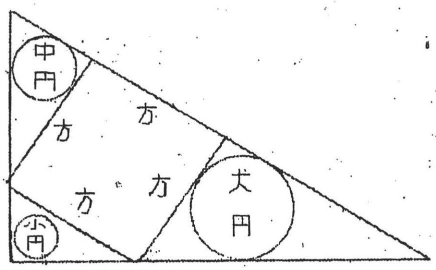
$BC^2 = AC^2 - x^2 = 17^2 - 8^2$

$= 289 - 64 = 225$

$\therefore\ BC = 15$

鎌田醫王寺の扁額(二)の譯

今図の様に直角三角形の内に正方形と大中小の円を内接せしめた。　大中小三円の直径の和は94寸で斜辺（弦）と正方形の一辺との差は125寸である．　正方形の一辺の長さを問ふ。



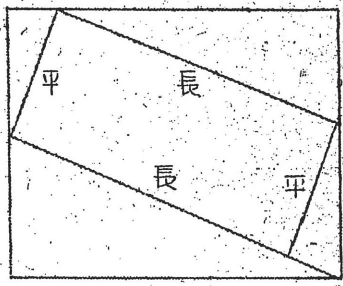
答　正方形の一辺は60寸

解法（術）．の譯文は省略してそれを式で表はせば

$$\left[\left\{(2x^2 + 125\cdot 94\cdot 2 - 125^2\cdot 8)x + 125^2\cdot 94\cdot 6 - 125^3\cdot 8\right\}x + 125^3\cdot 94\cdot 6 - 125^4\cdot 2\right]x + 125^4\cdot 94\cdot 2 - (x + 125)^2\cdot 125\cdot 94^2 = 0$$

この五次式を解いて　$x = 60$

今図の様な正方形（方面）の中に矩形（直形）があある。長い辺（長）は39寸で，短い辺（平）は12寸である。正方形の一辺の長さを問ふ。



答　正方形の一辺は38寸4分

解方　39へ12の3倍を加へ，39と12の差を掛け，開平しこれを天と名づける。

39の自乗と12の自乗の和から39と12の差と天との積を引き，余りを地と名づける。天に39を加へ，39と12の和を掛け人と名づける。39と12との差へ12を掛け人を加へ19の自乗を掛け，地で割り，得た数を開平して正方形の一辺を得て問に合ふ。　上の解法を式で示すと

$$\sqrt{(39+12\times 3)(39-12)} = \text{天} \qquad 39^2+12^2-(39-12)(\text{天}) = \text{地}$$

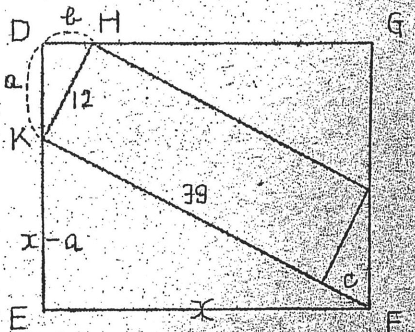
$$(\text{天}+39)(39+12) = \text{人}$$

$$\sqrt{\frac{\{(39-12)\times 12+\text{人}\}\times 12^2}{\text{地}}} = \text{正方形の一辺}$$

$$\sqrt{\frac{\left[(39-12)\times 12+\left\{\sqrt{(39+12\times 3)(39-12)}+39\right\}\{39+12\}\right]\times 12^2}{39^2+12^2-(39-12)\sqrt{(39+12\times 3)(39-12)}}} = \text{正方形の一辺}$$

以上の解法で何故こうして解いたか理由は判明しない．読者の研究を希望する。

別解　　洋　算　式　解　法



右図の様に符合をつければ

$\triangle HDK \backsim \triangle KEF$，　$\angle D=\angle E=\angle R$，

$DE=EF=x$，$KE=x-a$，$KF=39+c$，

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{x-a} = \dfrac{12}{c} & (1) \\ a^2 + b^2 = 12^2 & (2) \\ x^2 + (x-a)^2 = (39+c)^2 & (3) \end{cases}$$

(1)より $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{x^2}{(x-a)^2}$

$$\therefore \quad \frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{x^2}{x^2+(x-a)^2}$$

(2)(3) を代入して

$$\frac{a^2}{12^2} = \frac{x^2}{(39+c)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{12} = \frac{x}{39+c} \qquad (4)$$

(1)より $c = \dfrac{12(x-a)}{x}$

(4)へ代入して

$$\frac{a}{12} = \frac{x}{39+\dfrac{12(x-a)}{x}} = \frac{x^2}{39x+12x-12a}$$

$$\therefore \quad 12x^2 - 51ax + 12a^2 = 0$$

$$4x^2 - 17ax + 4a^2 = 0$$

$$(4x-a)(x-4a) = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{a}{4} \quad \text{又は} \quad x = 4a$$

但し図より

$$x = \frac{a}{4} \quad \therefore \quad a = \frac{x}{4} \cdots\cdots (5)$$

(1)より

$$b = \frac{a(x-a)}{x}$$

(2)に代入して

$$a^2 + \frac{a^2(x-a)^2}{x^2} = 12^2$$

(5)を上式に入れて

$$\left(\frac{x^2}{4}\right) + \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot \frac{\left(x-\frac{x}{4}\right)^2}{x^2} = 12^2$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{1}{16}\left(\frac{3x}{4}\right)^2 = 12^2$$

$$\frac{x^2}{16}\left(1+\frac{9}{16}\right) = 12^2$$

$$\frac{x^2}{4^2} \times \frac{5^2}{4^2} = 12^2$$

$$\therefore \quad \frac{5x}{4 \times 4} = 12$$

$$\therefore \quad x = \frac{12 \times 16}{5} = 38.4$$